

ΜΕΛΕΤΗ ΜΙΑΣ ΤΕΤΡΑΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

ΣΚΟΚΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

Τομέας Αστροφυσικής-Αστρονομίας-Μηχανικής
Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Πανεπιστημιόπολη
157 83 Ζωγράφος

ABSTRACT

We study the behaviour of a non-periodic orbit of a 4-dimensional symplectic mapping composed of two 2-dimensional mappings. The coupling term is very small so the morphology of the orbit is influenced strongly by the features of the 2-dimensional map.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μελετάμε την συμπεριφορά μιας μη περιοδικής τροχιάς της τετραδιάστατης συμπλεκτικής απεικόνισης:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + x_2 \\x_2' &= x_2 - v \sin(x_1 + x_2) - \mu [1 - \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)] \\x_3' &= x_3 + x_4 \quad (\text{mod } 2\pi) \\x_4' &= x_4 - k \sin(x_3 + x_4) - \mu [1 - \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)]\end{aligned} \quad (1)$$

η οποία αποτελείται από δύο συζευγμένες διδιάστατες συμπλεκτικές απεικονίσεις της μορφής:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + x_2 \\x_2' &= x_2 - v \sin(x_1 + x_2) \quad (\text{mod } 2\pi)\end{aligned} \quad (2)$$

Η (1) αποτελεί παραλλαγή της απεικόνισης του Froeschle (1972) και μελετήθηκε αρχικά απ'τους Contopoulos και Giorgilli (1988).

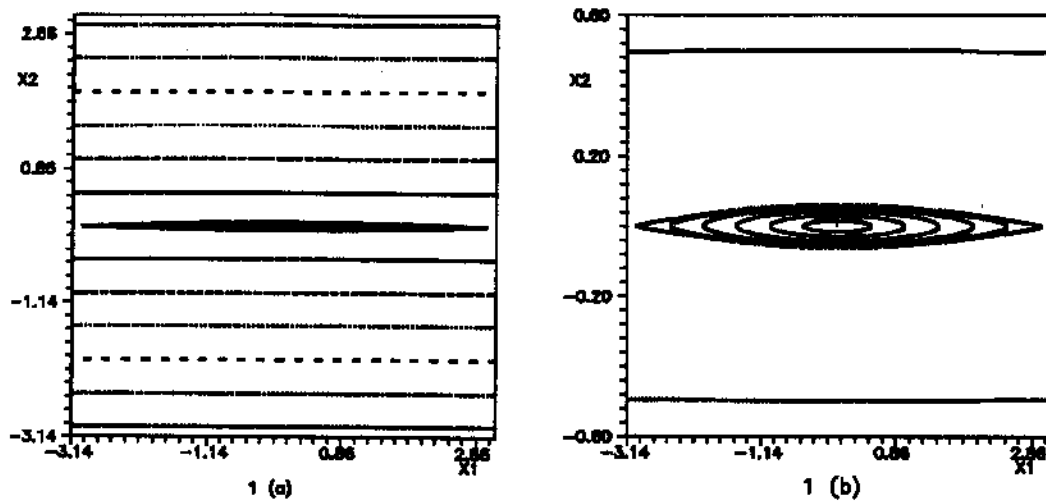
Οι τροχιές με αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned}\text{τροχιά 1a: } & x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \\ \text{τροχιά 1b: } & x_1 = -\pi \quad x_2 = 0\end{aligned}$$

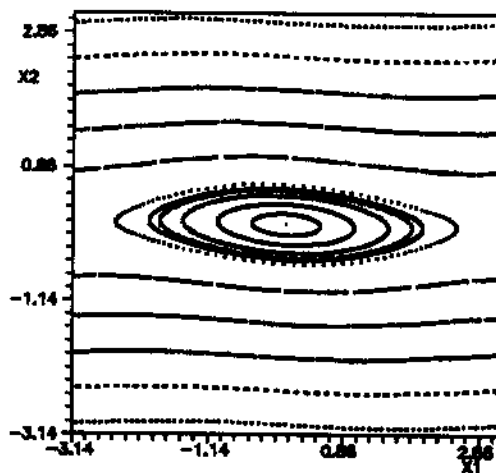
είναι περιοδικές τροχιές περιόδου 1 της διδιάστατης απεικόνισης (2) και σύμφωνα με τους Contopoulos και Giorgilli η 1b είναι συνεχώς ασταθής ενώ η 1a είναι ευσταθής για $0 < v < 4$ και ασταθής για $v > 4$. Επίσης θέτοντας $v=0$ θα έχουμε δύο ανεξάρτητες μονοδιάστατες απεικονίσεις: το x_2 παραμένει σταθερό και στην τιμή του x_1 προσθέτουμε συνεχώς την τιμή του x_2 . Όταν $x_2 = 2\pi k / \lambda$ ή $x_2 = -2\pi k / \lambda$ με $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$ $k < \lambda$ στο επίπεδο x_1, x_2 έχουμε λ σημεία τα οποία διαγράφονται ανά k .

Πρακτικά Πρώτου Πανελληνίου Αστρονομικού Συνέδριου, Αθήνα, 21-23 Σεπτεμβρίου 1992.
Proceedings of the First Panhellenic Astronomical Meeting, Athens, September 21-23, 1992

Στο σχήμα 1 έχουμε την μορφή της διδιάστατης απεικόνισης για $\nu=10^{-3}$ και στο σχήμα 2 για $\nu=0,1$ γιατί θα μελετήσουμε την τετραδιάστατη απεικόνιση για $\nu=10^{-3}$, $\kappa=0,1$ και $\mu=10^{-3}$ οπότε θα έχουμε σύζευξη: των σχημάτων 1α και 2.



Σχήμα 1. (α) Η διδιάστατη απεικόνιση για $\nu=10^{-3}$
 (β) Μεγένθυση της κεντρικής περιοχής του (α).



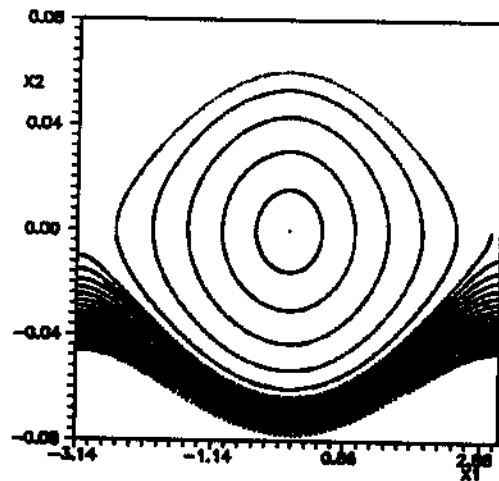
Σχήμα 2. Η διδιάστατη απεικόνιση για $\nu=0,1$.

2. ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ x_1, x_2

Στο σχήμα 3 έχουμε τις προβολές σημείων της τετραδιάστατης απεικόνισης στο επίπεδο x_1, x_2 όπου βλέπουμε μια διάταξη παρόμοια μ'αυτή της διδιάστατης απεικόνισης του σχήματος 1b.

Η διαφοροποίηση φαίνεται όταν οι τροχιές μας πλησιάζουν την απλά άπαθη περιοδική τροχιά, περιόδου 1 (με αρχικές συνθήκες $x_1 = -\pi$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ όταν $\mu = 0$).

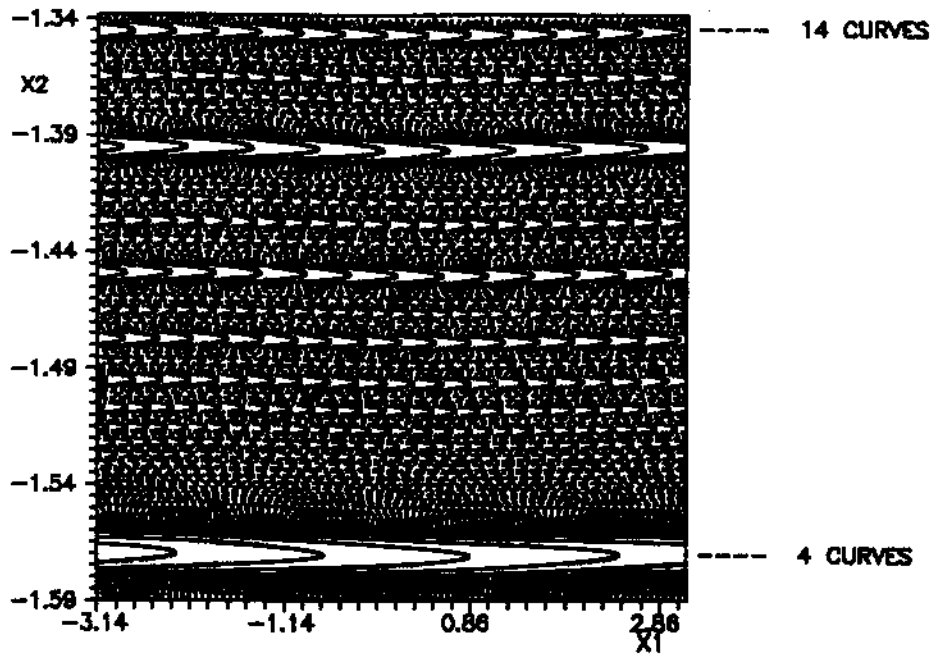
Συγκεκριμένα η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ δεν δίνει μια κλειστή καμπύλη αλλά τα σημεία της διατάσσονται με κάποια τάξη και συνεχώς κινούνται προς μικρότερες τιμές του x_2 φτάνουν στην περιοχή του $x_2 = -\pi$ και λόγω του $\text{mod } 2\pi$ συνεχίζουν στην περιοχή του $x_2 = \pi$ και κινούνται πάλι προς μικρότερες τιμές του x_2 . Ακολουθώντας την τροχιά για μεγάλο αριθμό σημείων βλέπουμε ότι στο επίπεδο $x_1 x_2$ έχουμε περιοχές γεμάτες σημεία όπως φαίνεται στην κλίμακα του σχήματος μας, οι οποίες διαχωρίζονται από ζώνες στις οποίες τα σημεία της τροχιάς σχηματίζουν ένα πλήθος από σαφώς καθορισμένες καμπύλες (σχήμα 4). Μεγενθύνοντας το σχήμα 4 μπορούμε να διακρίνουμε και άλλες ζώνες με καμπύλες οι οποίες δεν φαίνονται υπό την παρούσα κλίμακα.



Σχήμα 3. Προβολές στο επίπεδο $x_1 x_2$ τροχιών της τετραδιάστατης απεικόνισης με αρχικές συνθήκες $x_1 = 0 + i \cdot 0,5$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Για κάθε τροχιά υπολογίζουμε 3000 σημεία.

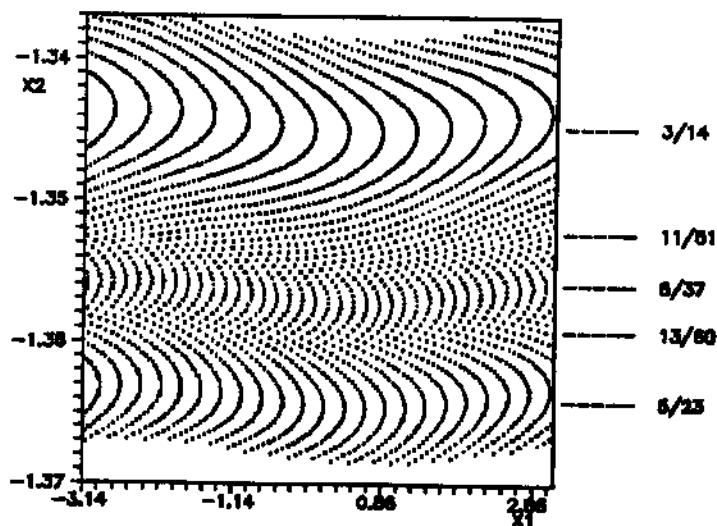
Εξετάζοντας σημείο προς σημείο τον τρόπο σχηματισμού των 4 καμπύλων του σχήματος 3 βλέπουμε ότι έχουμε 4 καμπύλες οι οποίες διαγράφονται ανά 1, δηλαδή ένα σημείο σε κάθε μια καμπύλη με την σειρά από δεξιά προς τα αριστερά. Έχουμε λοιπόν τον "συντονισμό" $1/4$. Αντίθετα οι 14 καμπύλες σημειώνονται στο σχήμα 4 διαγράφονται ανά 3, δηλαδή αν έχουμε ένα σημείο σε μια καμπύλη το επόμενο θα "πηδήξει" δύο και θα εμφανιστεί στην τρίτη καμπύλη. Έχουμε λοιπόν τον "συντονισμό" $3/14$. Γενικά στο επίπεδο $x_1 x_2$ έχουμε "συντονισμούς" της μορφής k/λ , $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$ με $k < \lambda$, δηλαδή λ καμπύλες οι οποίες διαγράφονται ανά k , με φορά απ' τα δεξιά προς τα αριστερά, οι οποίες εμφανίζονται όταν $x_2 \approx -2\pi \frac{k}{\lambda}$.

Τα σημεία στο επίπεδο x_1, x_2 μπορούν να διαταχθούν με πολλούς τρόπους πάνω σε καμπύλες διαφορετικών "συντονισμών" όταν τα δούμε σε μεγάλη μεγένθυση (σχήμα 6). Ο "συντονισμός" όμως ο οποίος φαίνεται μακροσκοπικά είναι αυτός του οποίου οι

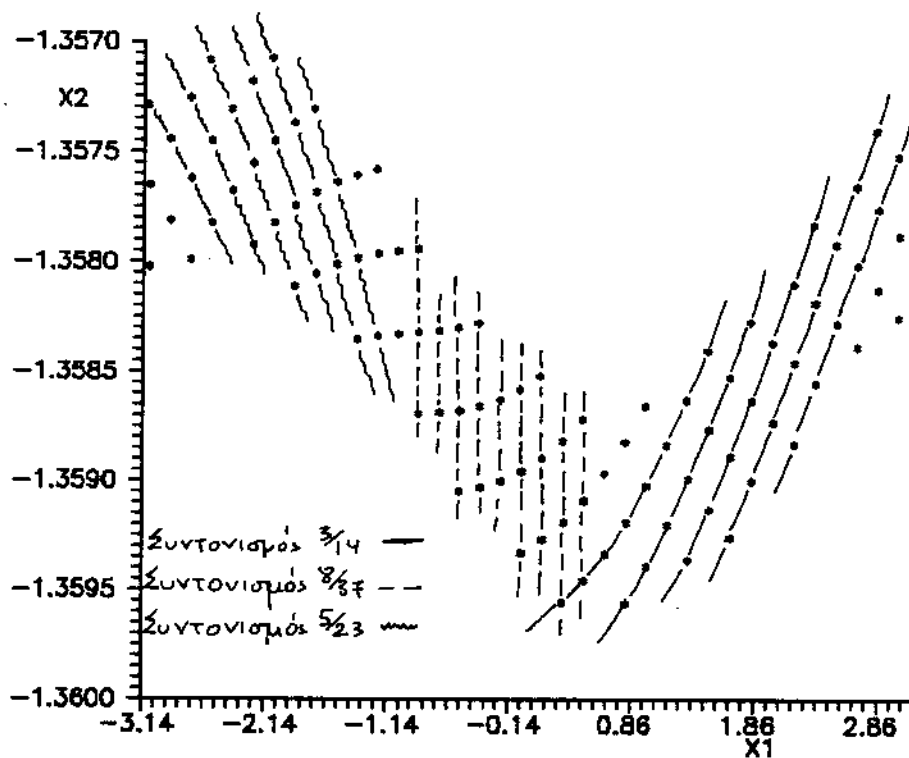


Σχήμα 4. Προβολές στο επίπεδο $x_1 x_2$ της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ μετά από 130.000 επαναλήψεις. Στο σχήμα έχουμε 25.000 σημεία.

καμπύλες είναι σχεδόν κάθετες στον άξονα x_1 (σχήμα 5). Πριν εμφανισθεί μακροσκοπικά ο "συντονισμός" οι καμπύλες του έχουν αρνητική κλίση ("συντονισμός" 5/23 στο σχήμα 6) ενώ μετά την εμφάνισή του έχουν θετική κλίση ("συντονισμός" 3/14 στο σχήμα 6).



Σχήμα 5. Μεγέθυνση της περιοχής του "συντονισμού" 3/14. Στο σχήμα σημειώνονται μερικοί ακόμα "συντονισμοί".



Σχήμα 6. Μεγένθυση της περιοχής του "συντονισμού" $8/37$ του σχήματος 5 (100 σημεία). Ο "συντονισμός" είναι ορατός στο σχήμα 5 γιατί οι καμπύλες του είναι σχεδόν κάθετες στον άξονα x_1 σ' αντίθεση με τις καμπύλες των άλλων "συντονισμών".

3. Συμπεράσματα

Μελετώντας την τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ της απεικόνισης (1) γίνεται φανερό ότι τα χαρακτηριστικά των δύο διδιάστατων απεικονίσεων παίζουν καθοριστικό ρόλο στην μορφή της. Συγκεκριμένα στο επίπεδο x_1, x_2 εμφανίζονται "συντονισμοί" της μορφής k/λ με $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$, $k < \lambda$ όταν $x_2 \approx -2\pi k/\lambda$ οι οποίοι οφείλονται στο ότι για $\mu=\nu=0$ στο επίπεδο x_1, x_2 έχουμε "συντονισμό" k/λ όταν $x_2 = -2\pi \frac{k}{\lambda}$. Στον "συντονισμό" $\frac{k}{\lambda}$ αντιστοιχούν λ καμπύλες οι οποίες διαγράφονται ανά k και όταν γίνονται σχεδόν κάθετες στον άξονα x_1 ο "συντονισμός" γίνεται μακροσκοπικά ορατός.

Αναφορές:

Contopoulos, G and Giorgilli, A.: 1988, ESO preprint no. 570.
Froeschle, C.: 1972, Astron. Astrophys. 16, 172.